DV-02 ÉNONCÉ

Soit un triangle ABC.
On porte de B vers A : BP = BC et de C vers A : CQ = BC.

Le centre du cercle inscrit est I, celui du cercle circonscrit est O

Démontrer que PQ est perpendiculaire à OI ?

SOLUTION

Nous nous proposons de démontrer que si PQ est perpendiculaire OI alors, par construction, cela entraine l'égalité : BP=CQ=BC

1 : Rappelons les propriétés de la figure 1 :

-égalité des triangles MCQ et MBP : MB=MC, BP=CQ, angle B1 = angle C1 (même arc MA du cercle C1)
- donc MQ=MP (diamètre MN et hauteur du triangle isocèle MBC) et ce triangle isocèle MPQ est inscrit dans le cercle C2 (angle droit NAM, A 'milieu de l'arc PQ et bissectrice AN
-PMQ =BMC (BMC=BAC (même arc sur le cercle C1)=PMQ (cercle C2)
-dans le quadrilatère BPQC, et par les combinaisons des égalités BC=BP=CQ on démontre que le segment M'M'' qui joint les milieux M' de BC et le milieu M'' de PQ est parallèle à la bissectrice de BAC (voir figure 3)

2 : Construction de PQ (figure 2)

- le point M'' se situe dons à l'intersection de M'M'' et MM'' hauteur du triangle isocèle
….à partir de ce point M'' nous allons reconstruire dans la figure 2 toutes les propriétés vues en 1, il suffira de tracer la perpendiculaire à MM'' soit PQ elle-même perpendiculaire à OI:delta1 // delta2 et nous démontrons que par construction :
…la perpendiculaire à OI entraine l'égalité primaire BP=CQ=BC, et qui n'est

constructible que si :
OI est perpendiculaire à PQ ….

3 : Justification de M’’ (figure 3)

-mise en évidence du losange M’’N’’M’N’ par la combinaison des milieux des segments BQ, PC, et la relation des segments milieux des côtés d’un triangle, la droite M’’ M’est parallèle à la bissectrice AN car étant deux bissectrices d’angles à cotes parallèles soit BAC et N’’M’’ N’ (propriétés du losange)M’’ est bien le milieu de PQ et est à la base de a construction de la figure 2 CQFD

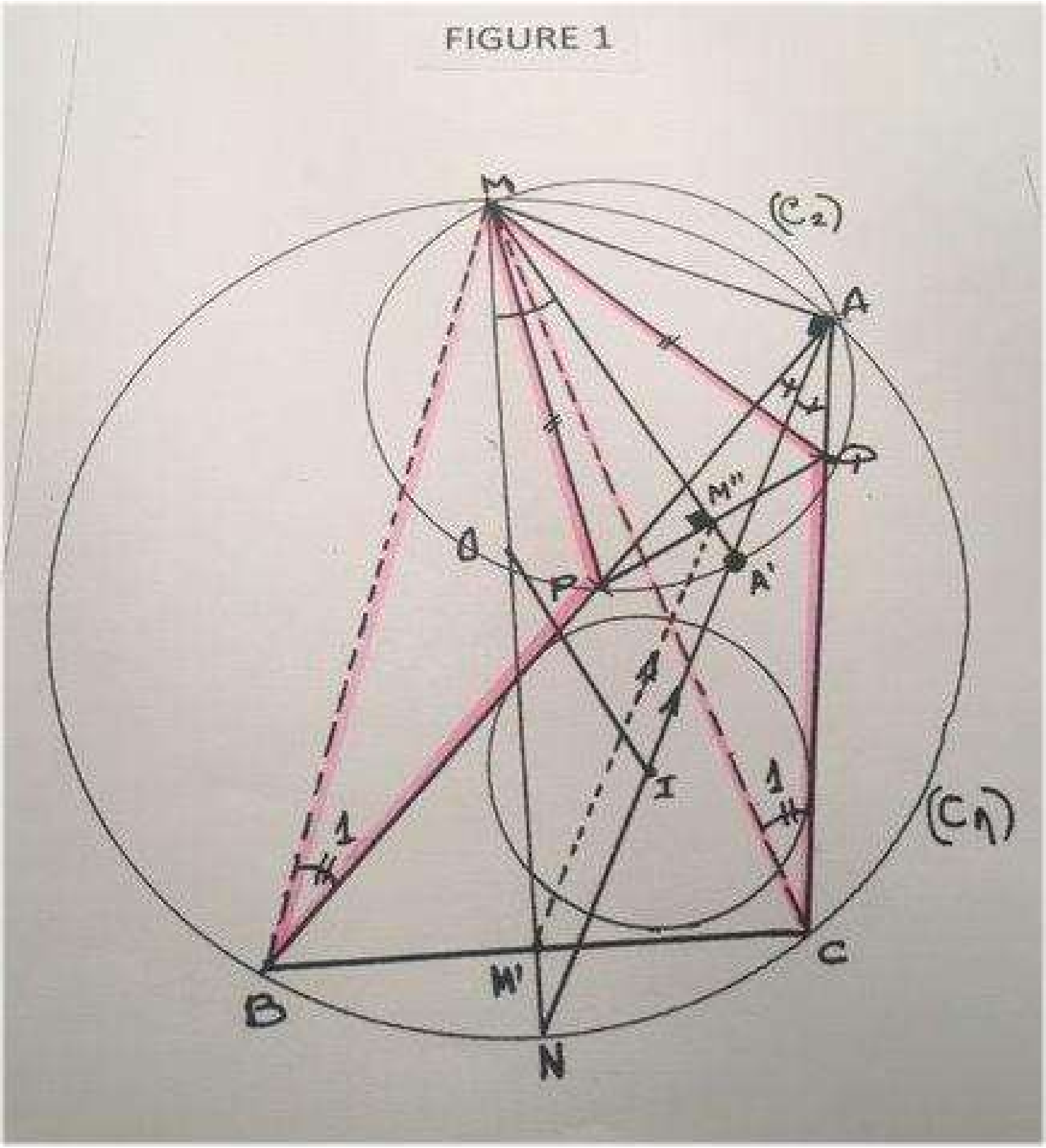

FIGURE 2

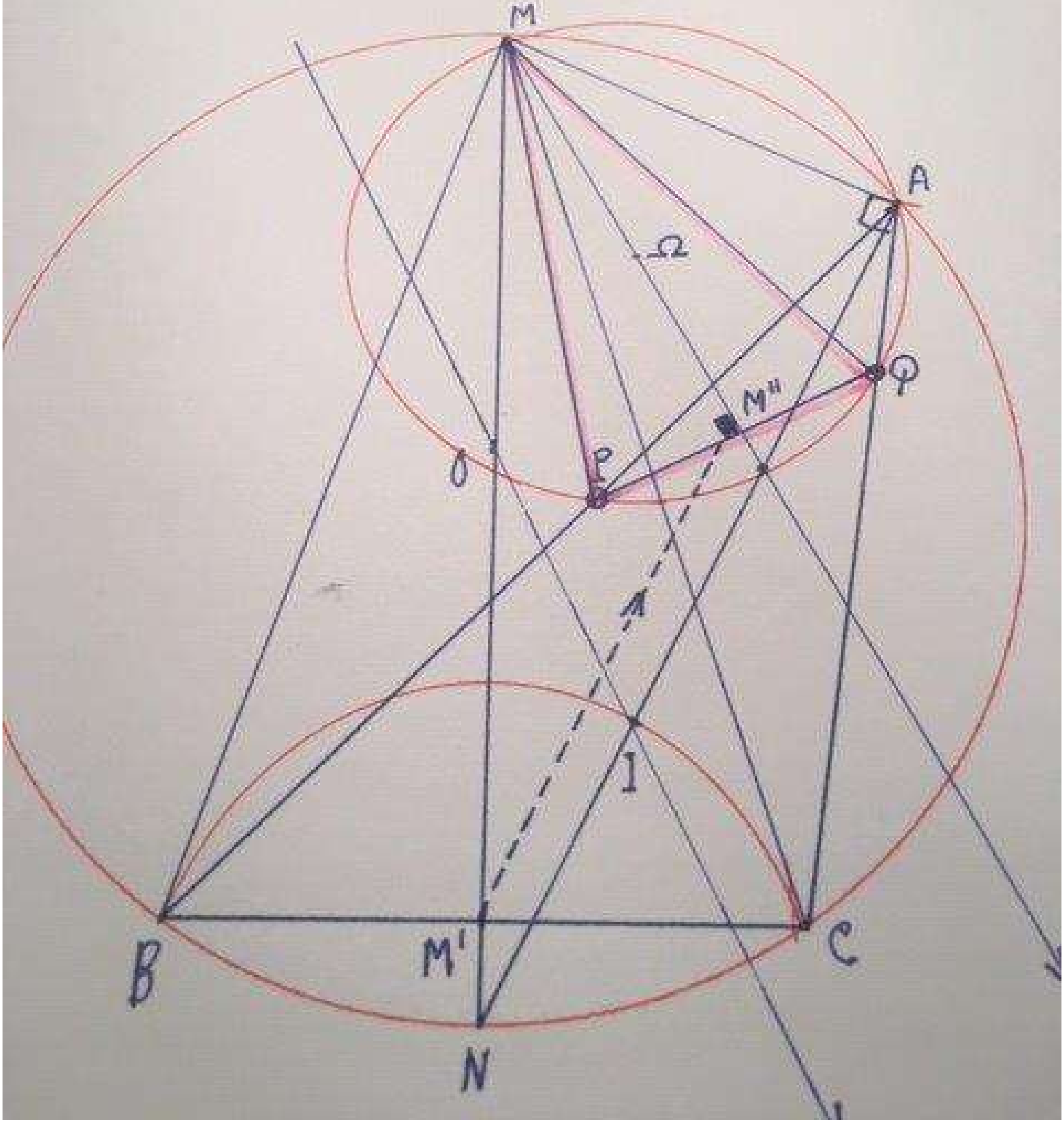

FIGURE 3