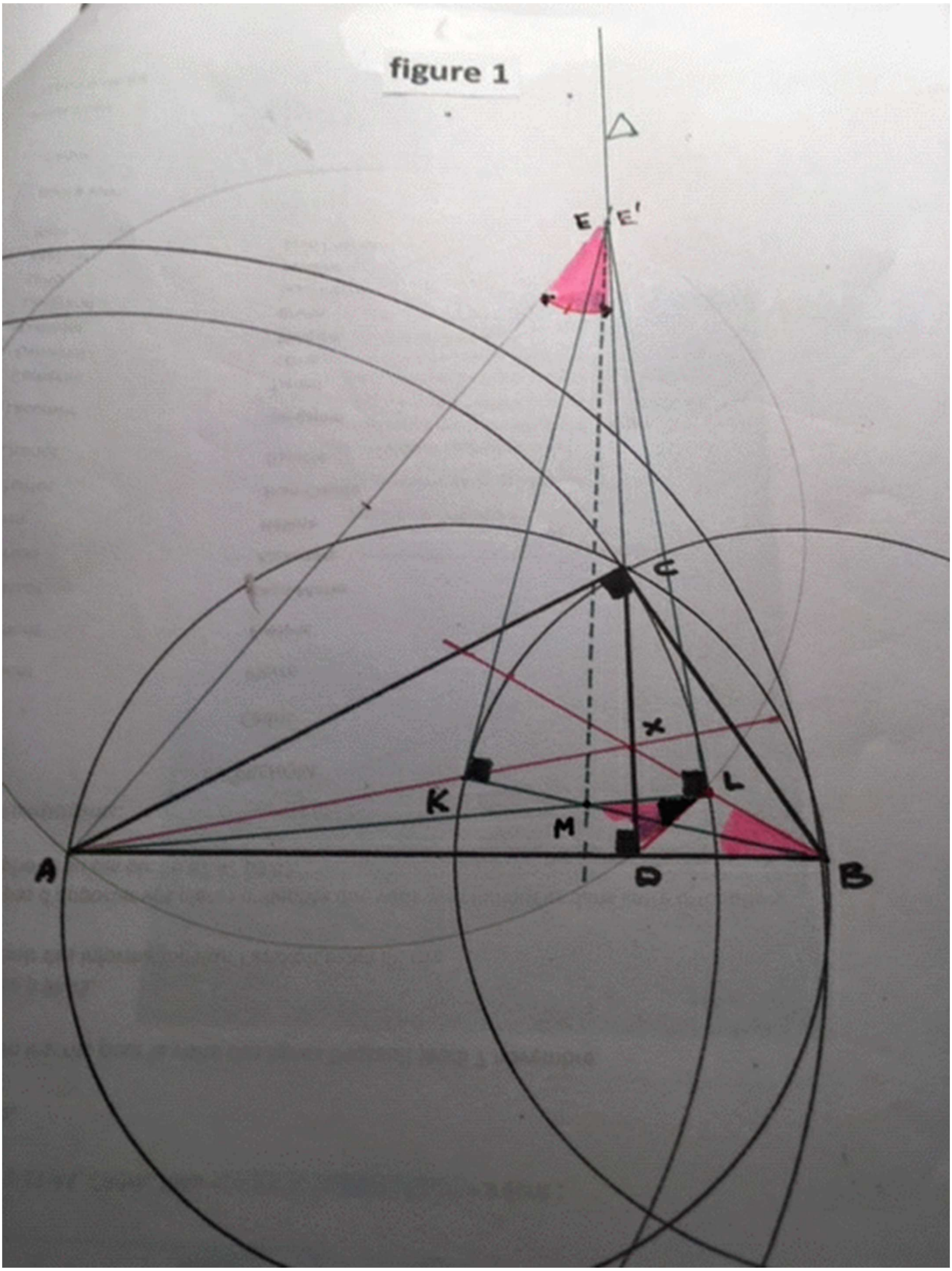
PROBLEME ARCHIm'aide N°4 : proposition de solution



La construction de la figure 1 montre que le cercle C (A, AC) centré en A et de rayon AC coupe BX en L, et le cercle C(B,BC) centré en B de rayon BC coupe AX en K. CD est l’axe radical de ces deux cercles.

La tangente à C (A, AC) en L et la tangente à C (B, BC) en K se coupent en E. Si nous démontrons que E se situe sur cet axe radical CD, le problème est résolu car alors EK=EL et puisque AL est perpendiculaire EL et BK perpendiculaire à EK les triangles rectangles EKM et ELM sont égaux et alors MK=ML

Admettons que E’ soit le point d’intersection de CD et EL, puisque les angles ADE’ et ALE’ sont droits les 4 points A, D, L, E’ sont cocycliques donc <AE’D =<ALD

Et dans le triangle rectangle : ABC : AC/AD=AB/AC et de plus par construction AL/AD=AB/AL, d’où comme

L’angle A est commun, les deux triangles ALD et ABL sont semblables d’où l’égalité des angles LBD/LBA/ALD/AE’D et les triangles droits AE’D et XBD sont semblables ainsi E’D/AD=BD/XD, et E’D=AD.BD/DX ce qui montre que E’ ne dépend que de A, B, D et X…

Si E’’ est l’intersection de AK et CD, nous parviendrons à l’égalité :

DE’’=AD.BD/DX ce qui démontre que les deux points E’et E’’ sont confondus et EK=EL, les deux triangles rectangles MKE et MLE sont égaux et :

MK = ML cqfd