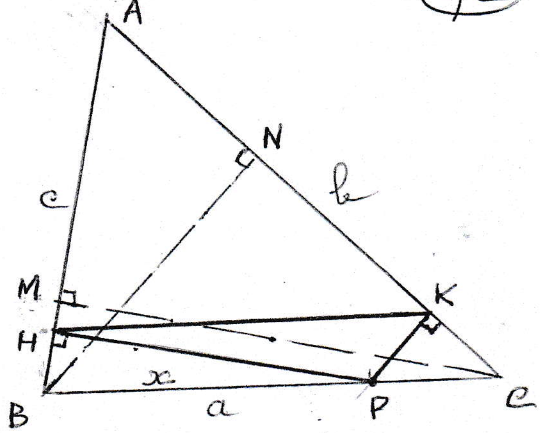
PROBLÈME n° 6

19 janvier 2020



les côtés AB, BC, CA du triangle ABC mesurent respectivement 5, 6 et 7 cm. Placer un point P sur BC tel que le segment qui joint les pieds H et K des perpendiculaires abaissées respectivement sur AB et AC soit parallèle à BC

SOLUTION PROPOSÉE :

HK est parallèle à BC si $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AK}{AC}$

$\dfrac{AB-BH}{AB} = \dfrac{AC-CK}{AC}$ d'où on tire $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{CK}{AC}$ et $\boxed{\dfrac{BH}{CK} = \dfrac{5}{7}}$ (1)

Posons : $BC = a = 6$ / $AB = c = 5$ / $AC = b = 7$ et $BP = x$

De plus, le 1/2 périmètre du triangle ABC est égal à $p = \dfrac{5+6+7}{2} = 9$

Traçons les hauteurs BN et CM issues de B et C.

On a $BN = \dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{2}{b}\sqrt{216} = \dfrac{12\sqrt{6}}{7} \simeq 4,2$ cm

et $CM = \dfrac{2}{c}\sqrt{216} = \dfrac{12\sqrt{6}}{5} \simeq 5,88$ cm

Considérons les triangles BHP et BMC : on a : $\dfrac{BH}{BM} = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{x}{a}$ d'où $BH = BM.\dfrac{x}{a}$
(Thalès)

De même avec les triangles CKP et CNB, on a : $\dfrac{CK}{CN} = \dfrac{CP}{BC} = \dfrac{a-x}{a}$ d'où $CK = CN.\dfrac{a-x}{a}$
(Thalès)

Or le Théorème de Pythagore nous dit que :

$BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} \simeq 1,2$ cm et $CN = \sqrt{BC^2 - BN^2} \simeq 4,286$ cm

En conséquence :

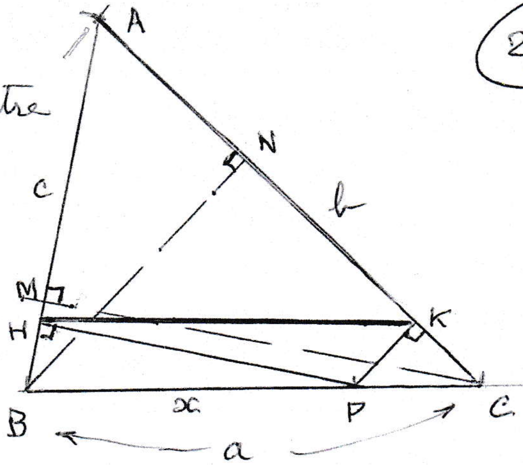
$BH = \dfrac{1,2x}{6} = 0,2x$ et $CK = \dfrac{4,286(6-x)}{6} = 4,286 - 0,7143x$

Pour que HK soit parallèle à BC, il faut que $\dfrac{BH}{CK} = \dfrac{5}{7}$ (1)

donc que $\dfrac{0,2x}{4,286 - 0,7143x} = \dfrac{5}{7}$

Un calcul donne $\boxed{x = 4,31 \text{ cm}}$

Voir feuille suivante la généralisation du problème →



- <u>Cas général</u> :

posons $BC = a$ $CA = b$ $AB = c$ et le demi périmètre $p = \frac{a+b+c}{2}$ et $BP = x$

Il s'agit de déterminer x pour que HK soit parallèle à BC et donc que $\frac{BH}{CK} = \frac{c}{b}$

posons $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = R^2$

Traçons les hauteurs du triangle ABC : BN et CM

on a $BN = \frac{2}{b} R^2$ et $CM = \frac{2}{c} R^2$

– Par Thalès, on a :

$$\frac{BH}{BM} = \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \frac{CK}{CN} = \frac{a-x}{a}$$

donc $BH = BM \cdot \frac{x}{a}$ et $CK = CN \, \frac{a-x}{a}$

– Par Pythagore, on a :

$$BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4R^4}{c^2}} \quad \text{et} \quad CN = \sqrt{BC^2 - BN^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4R^4}{b^2}}$$

d'où $BH = \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - \frac{4R^4}{c^2}}$ et $CK = \frac{a-x}{a}\sqrt{a^2 - \frac{4R^4}{b^2}}$

Donc, pour que HK soit parallèle à BC, il faut :

$$\frac{BH}{CK} = \frac{\frac{x}{\cancel{a}}\sqrt{a^2 - \frac{4R^4}{c^2}}}{\frac{a-x}{\cancel{a}}\sqrt{a^2 - \frac{4R^4}{b^2}}} = \frac{c}{b}$$ (on peut simplifier "a")

Pour simplifier l'écriture posons $\sqrt{a^2 - \frac{4R^4}{c^2}} = C$ et $\sqrt{a^2 - \frac{4R^4}{b^2}} = B$

Après calculs on trouve : avec $R^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$$\boxed{x = \frac{ac \cdot B}{bC + cB}}$$

- <u>Vérification numérique</u> avec $a = 6$, $b = 7$ et $c = 5$ donc $p = 9$

on a $R^4 = 9 \times 3 \times 2 \times 4 = 216$

$$B = \sqrt{6^2 - \frac{4 \times 216}{7^2}} = 4{,}286 \qquad C = \sqrt{6^2 - \frac{4 \times 216}{5^2}} = 1{,}2$$

donc $x = \frac{6 \times 5 \times 4{,}286}{7 \times 1{,}2 + 5 \times 4{,}286} = 4{,}31$

CQFD / EURÉKA !